УДК 330.3:330.46

Л.А. Білий,Г.Я. Дутка

Аналіз періодичних процесів економічного зростання на основі моделі чутливості

Запропоновано аналіз нелінійної моделі економічного зростання Харрода-Домара на основі моделі чутливості до початкових умов. В основу моделі покладено допущення про нелінійність виробничої функції і періодичний характер обсягу споживання. Замість традиційного розв'язування задачі Коші і визначення процесу економічного зростання як закінчення перехідного процесу пропонується шукати T-періодичний розв'язок. Рівняння моделі разом із початковими умовами на краях періоду утворюють двоточкову крайову задачу. Чисельне інтегрування диференціального рівняння здійснюється на відрізку часу, рівному періоду T, і знайдений розв'язок для t=T уточнюється ітераційною формулою Ньютона. Умовою визначення періодичних розв'язків є рівність нулю цільової функції.

Ключові слова: економічне зростання, математична модель, виробнича функція, модель чутливості.

Економічне зростання є однією з найважливіших суспільних проблем, на яку постійно звертають увагу політики, економісти і вчені. Темпи економічного зростання визначають динаміку економічного розвитку країни, її авторитет на міжнародній арені та історичні перспективи.

Під економічним зростанням розуміють збільшення реального доходу (випуску) в економіці (ВВП, ВНП, НД), а також збільшення реального доходу (випуску) в розрахунку на душу населення країни.

Фактори економічного зростання класифікують за різними ознаками. Так, вирізняють фактори попиту, розподілу та пропозиції. До факторів попиту відносять рівень цін, споживчі, інвестиційні, державні витрати, обсяг чистого експорту. Фактори розподілу складають повнота та раціональність залучення ресурсів у виробничий процес. Найважливіше значення мають фактори пропозиції, які забезпечують саму потенційну можливість зростання. Їх групують відповідно до типів економічного зростання. Екстенсивні фактори: зростання капіталу, збільшення праці (кількість зайнятих та кількість відпрацьованого робочого часу). Інтенсивні фактори: технологічний прогрес, зростання професійного та освітнього рівня робітників, вдосконалення управління виробництвом, системи організації та мотивації праці.

Причинами, що стримують економічне зростання, називають ресурсні, економічні та інституційні обмеження, а також соціальні витрати, пов'язані зі зростанням виробництва.

Моделі економічного зростання є абстрактним вираженням процесу зростання у функціональних рівняннях та графіках. Ці моделі дають можливість виявити вплив змін певних факторів економічного зростання на обсяги випуску, встановити рівноважні темпи зростання при існуючих параметрах економіки.

Мета роботи полягає у застосуванні методу моделі чутливості до початкових умов до розв'язування макроекономічних моделей з нелінійними виробничими функціями на прикладі моделі економічного зростання Харрода-Домара [1–3].

Макроекономічними моделями називають моделі народногосподарського рівня, що оперують макроекономічними показниками типу: валовий суспільний продукт, національний дохід, обсяг основних фондів, трудові ресурси країни тощо.

Макроекономічні моделі є ефективним інструментом теоретичних досліджень динаміки економічного розвитку, вони також мають важливе прикладне значення. Вироблення концепції економічного і соціального розвитку, прогнозування і планування узагальнюючих показників народного господарства здійснюється з використанням таких моделей.

Узагальненою макроекономічною моделлю економічного зростання є модель Харрода-Домара, яка описує динаміку доходу $Y(t)$, неперервну в часі.

Дохід представляється сумою споживання та інвестицій:

$$Y(t) = C(t) + I(t). \tag{1}$$

Економіка вважається закритою, отже, чистий експорт дорівнює нулю. Держава не втручається в економіку.

В основу моделі покладено такі допущення:

1. Швидкість зростання доходу пропорційна інвестиціям

$$I(t) = B(t)\frac{dY}{dt}, \tag{2}$$

де $B(t)$ – коефіцієнт капіталомісткості приросту доходу;

$\frac{1}{B(t)}$ – прирістна капіталовіддача.

2. Інвестиційний лаг дорівнює нулю. Інвестиції миттєво переходять у приріст капіталу, тобто

$$\Delta K(t) = I\,(t). \tag{3}$$

де $\Delta K(t)$ – неперервна функція приросту капіталу в часі.

3. Вибуття капіталу немає.
4. Виробнича функція $Y(t)$ в моделі є лінійною [4].
5. Випуск не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом.
6. Модель не враховує технічного прогресу.

Модель призначена для вивчення взаємозв'язку динаміки інвестицій і зростання випуску. Для прогнозування величини сукупного випуску її не застосовують.

Показник обсягу споживання $C(t)$ може бути постійним у часі, зростати із заданим постійним темпом або мати будь-яку іншу динаміку.

Підставивши в рівняння доходу (1) значення інвестицій з (2), одержимо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння:

$$Y(t) = B(t)\frac{dY}{dt} + C(t), \tag{4}$$

яке називають макроекономічною моделлю економічного зростання Харрода-Домара.

Відповідно до (4) при заданому постійному параметрі $B(t) = B$ динаміка національного доходу визначається траєкторією $C(t)$.Таким чином, аналіз поведінки розв'язку рівняння (4) одержують при різних гіпотезах про динаміку споживання.

Не вдаючись у детальні викладки, наведемо типові випадки аналізу для різного характеру обсягів споживання.

1. Гіпотеза, що весь національний дохід спрямовується на розширення виробництва і споживання відсутнє. Зрозуміло, що така гіпотеза нереалістична, але вона дає змогу оцінити максимально можливий темп збільшення національного доходу, обмежений тільки матеріаломісткістю і фондомісткістю виробництва. При $C(t) = 0$

$$Y(t) = Y(0)e^{\frac{1}{B}t}. \tag{5}$$

Коефіцієнт B називають акселератором. У загальному випадку акселератор – це коефіцієнт пропорційності між вихідною величиною і швидкістю зміни вхідної величини.

Розглядаючи значення коефіцієнта капіталомісткості національного доходу як функцію часу $B = B(t)$, одержують загальний розв'язок:

$$Y(t) = Y(0)e^{\overline{\frac{1}{B(t)}}}, \tag{6}$$

де

$$\frac{1}{B(t)} = \int_0^t \frac{dt}{B(t)}. \tag{7}$$

Очевидно, що зі зростанням $B(t)$ технологічний темп зменшується, а зі зменшенням – збільшується.

2. $C(t) = C(0) = \text{const}$. Загальний розв'язок рівняння (4) подають у вигляді

$$Y(t) = Y(0)e^{\frac{1}{B}t} + C(0). \tag{8}$$

При $t = 0$ $Y(0) = \hat{Y} + C(0)$ або $\hat{Y} = Y(0) - C(0)$.

Звідси

$$Y(t) = (Y(0) - C(0))e^{\frac{1}{B}t} + C(0). \tag{9}$$

Висновок: очевидно, що $Y(t)>0$, якщо, $Y(0)> C(0)$, тобто в початковий момент споживається не весь національний дохід. Тоді відповідно до (9) національний дохід збільшується у зростаючому темпі, оскільки в обсязі $Y(t)$ неперервно збільшується частка доданка $(Y(0) - C(0))e^{\frac{1}{B}t}$.

3. $C(t) = C(0)e^{rt}$. Це варіант моделі, у якій споживання зростає з постійним темпом r. При аналізі розв'язку припускають, що $Y(0)> C(0)$. Загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд:

$$Y(t) = \hat{Y} e^{\frac{1}{B}t} + \frac{1}{1 - Br} C(0)e^{rt}. \tag{10}$$

З нього при $t = 0$ знаходимо:

$$\hat{Y} = Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br}. \qquad (11)$$

Тоді загальний розв'язок стане таким:

$$Y(t) = (Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br})e^{\frac{1}{B}t} + \frac{1}{1 - Br}C(0)e^{rt}. \qquad (12)$$

Подібні аналітичні результати утворюються при включенні до моделі різного характеру траєкторії зростання споживання $C(t)$.

У випадку нелінійної виробничої функції математична модель (4) також стає нелінійною. Тому замість вищенаведених аналітичних розв'язків тепер необхідно використовувати чисельні методи.

Крім того, повний аналіз будь-яких систем, у тому числі економічних, включає у себе розв'язування таких задач: розрахунок перехідних процесів, знаходження усталених процесів, визначення стійкості знайдених розв'язків і оцінка чутливості функцій системи.

При аналізі перехідних процесів математичною моделлю є система диференціальних рівнянь або (як у нашому випадку) одне диференціальне рівняння (4).

Задача аналізу статичного стану системи зводиться до розв'язування системи алгебраїчних і трансцендентних рівнянь.

Для визначення стійкості використовують алгебраїчні критерії.

Під чутливістю розуміють вплив внутрішніх параметрів системи на її зовнішні характеристики. Таку чутливість називають параметричною, на відміну від чутливості до початкових умов.

Найчастіше задачу розрахунку параметричної чутливості здійснюють варіаційним методами, що є надто складно.

Розрізненість математичного апарата, що застосовується на кожному з етапів аналізу, вимагає створення окремих, невиправдано громіздких програм, а це надто ускладнює обчислювальний процес.

Хоча загальна постановка проблеми про створення теорії єдиних алгоритмів, які дають змогу на підставі лише одного математичного апарата – загальної теорії диференціальних рівнянь здійснити розв'язування усіх чотирьох задач аналізу виходить за рамки поставленої мети, покажемо можливість створення такої теорії.

Періодичні процеси економічного зростання, очевидно, матимуть місце тоді, коли показник обсягу споживання $C(t)$ буде постійним або періодичним у часі. Виберемо останнє, тобто нехай

$$C(t) = C_m \sin(k\,T), = 0 \div n \qquad (13)$$

де C_m – амплітуда показника обсягу споживання;

T – період;

n – найбільша кількість періодів повторюваності.

Запишемо рівняння (4) з урахуванням (13):

$$Y(t) = B(t)\frac{dY}{dt} + C_m \sin(kT), \qquad (14)$$

яке представимо у нормальній формі Коші, тобто у вигляді, розв'язаному відносно похідної:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{1}{B(t)}(Y(t) - C_m \sin(kT)). \qquad (15)$$

Інтегруючи (15) будь-яким чисельним методом впродовж kT періодів, можна отримати періодичний процес як закінчення перехідного. Але при цьому необхідно виконати великий об'єм обчислень, що призводить до непродуктивного використання комп'ютерного часу, а головне – до накопичення похибок чисельного інтегрування і спотворення реального процесу. Ці вади стануть відчутними особливо тоді, коли об'єкт дослідження буде описуватися не одним нелінійним диференціальним рівнянням, а системою високого порядку.

Розв'язання проблеми полягає у тому, щоб знайти такі початкові умови для інтегрування (15), які б виключили всі неперіодичні розв'язки і відразу привели б до періодичного процесу [5]. Такі початкові умови розглядатимемо як аргумент рівняння періодичності:

$$Y(t) = Y(t{+}T). \qquad (16)$$

Вирази (15), (16) становлять двоточкову T-періодичну крайову задачу для нелінійного диференціального рівняння.

Рівняння періодичності представимо у вигляді цільової функції при t=0:

$$F(Y(0)) = Y(0) - Y(T) = 0. \qquad (17)$$

При такій постановці задачі початкові умови стають шуканими змінними, знаходити які будемо на основі (17). Розв'язання нелінійного трансцендентного рівняння (17) здійснимо ітераційним методом Ньютона. Стосовно цього рівняння формула Ньютона буде мати вигляд:

$$Y(0)^{k+1} = Y(0)^k - [F`(Y(0)^k)]^{-1} \times F(Y(0)^k \qquad (18)$$

Матрицю Якобі, яка у випадку одного диференціального рівняння (15) складатиметься з одного елемента, отримаємо диференціюванням по $Y(0)$ цільової функції (17):

$$F`(Y(0)) = E - \Phi\,(Y(0)), \qquad (19)$$

де E – одинична матриця, в даному випадку $E = 1$;

$\Phi(Y(0)) = \dfrac{dY(T)}{dY(0)}$ – матриця чутливості до початкових умов. (20)

Визначення матриці чутливості є складною проблемою аналізу. Порівняно недавно був розроблений метод, який приводить до варіаційних рівнянь. Таке рівняння отримаємо диференціюванням (15) по $Y(0)$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{B}\Phi, \qquad (21)$$

де $\Phi = \dfrac{dY}{dY(0)}$ – матриця (20).

Варіаційне рівняння (21) – лінійне однорідне диференціальне рівняння, тому з нього легко знаходимо матрицю чутливості до початкових умов:

$$\frac{d\Phi}{\Phi} = \frac{1}{B}dt, \qquad (22)$$

звідки

$$\Phi = e^{\frac{1}{B}t}. \qquad (23)$$

Алгоритм обчислень:

1. Маючи на k-й ітерації значення $Y(t)^k$, $\Phi\ (Y(0))^k$ (на першому кроці початкові наближення $Y(t)^0$, $\Phi\ (Y(0))^0$), інтегруємо рівняння (15), (21) на часовому інтервалі $[0,\ T]$.
2. Отримавши на останньому кроці інтегрування при $t = T$ значення $Y(t)^k$, $\Phi\ (Y(0))^k$, згідно з (17), обчислюємо $F(Y(0)^k)$, а згідно з (19) –. F ‘$(Y(0)^k)$.
3. На підставі ітераційної формули (18) знаходимо уточнене значення $Y(0)^{k+1}$.

Якщо диференціальне рівняння (15) лінійне, то запропонований метод вводить у періодичний розв’язок за одну ітерацію формули (18).

Інтегруючи рівняння (15) упродовж тривалого часу, одержимо перехідний процес.

Стійкість періодичного розв’язку визначається на основі рівняння першої варіації (21) – моделі чутливості до початкових умов.

Для того, щоб усі розв’язки варіаційного рівняння (22) прямували до нуля при $t \to\infty$, необхідно й достатньо, аби всі власні числа матриці чутливості до початкових умов $\Phi\ (Y(0)$ були за модулем меншими за одиницю. Власні числа матриці чутливості називаються мультиплікаторами.

Порівняння традиційного використання макроекономічної моделі Харрода-Домара, суть якого зводиться до розв’язання лінійного однорідного диференціального рівняння, із запропонованим методом його розв’язання на основі моделі чутливості до початкових умов дає підставу для таких висновків:

1. Покладені в основу моделі допущення при існуючому підході до аналізу економічного зростання є дуже жорсткі і вкрай обмежують її практичне використання. Зокрема, хіба може існувати будь-яка економічна категорія, обсяги споживання якої є нульові (дивись п. 1, формула (5))? Таке допущення обумовлене зручністю розв’язання рівняння (4), а не реальним станом економічного процесу.

Сказане стосується і до іншого допущення про незмінність споживання виробленого суспільством національного доходу (дивись п. 2, формула (8)).

2. Допущення про лінійність виробничої функції $Y(t)$ орієнтує застосування моделі лише на аналіз лінійних економічних об’єктів, що не відповідає реально існуючій ситуації.

3. Традиційне використання моделі Харрода-Домара не дає змоги на основі єдиного математичного апарату розв’язати решту задач аналізу – визначення стаціонарного процесу і стійкості отриманих результатів.

4. Дослідження економічних об’єктів на основі моделі чутливості до початкових умов усуває вказані недоліки. Крім того, використання ітераційної формули Ньютона забезпечує отримання розв’язку задачі із заздалегідь заданою точністю.

5. Аналіз економічного зростання на основі моделі чутливості до початкових умов узагальнює його використання на дослідження нелінійних економічних систем. При цьому усі етапи аналізу базуються на одному математичному апараті – загальній теорії диференціальних рівнянь, що суттєво спрощує його.

Список використаних джерел

1. Кочура Є.В. Моделювання макроекономічної динаміки / Є.В. Кочура, В.М. Косарєв. Дніпропетровськ: Вид. ДУЕП, 2003. – 235 с.
2. Здрок В.В. Моделювання економічної динаміки / В.В. Здрок, І.М. Заславський. – Львів: Вид. центр ЛНУ ім. І. Франка, 2007. – 244 с.
3. Малиш Н.А. Моделювання економічних процесів ринкової економіки [навч. посібн.] / Н.А. Малиш. – К.: МАУП, 2004. – 120 с.
4. Клейнер Г.Б. Производственные функции: Теория, методы, применение / Г.Б. Клейнер. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 239 с.
5. Білий Л.А. Єдиний підхід до аналізу складних динамічних систем / Л.А. Білий. // Соціально-економічні дослідження в перехідний період. Ринкові перетворення в Україні в умовах світових інтеграційних процесів [зб. наук. праць] / НАН України, Ін-т регіональних досліджень. – Львів, 2005. – Вип. 6 (LVI). – С. 60-65.

Билый Л.А., Дутка А.Я. Анализ периодических процессов экономического роста на основании модели чувствительности.

Предложен анализ нелинейной модели экономического роста Харрода-Домара на основании модели чувствительности к начальным условиям. В основу модели положены допущения о нелинейности производственной функции и периодическом характере объема потребления. Вместо традиционного решения задачи Коши и определения процесса экономического роста как окончания переходного процесса предлагается искать T-периодическое решение. Уравнение модели вместе с начальными условиями по краям периода составляют двухточечную краевую задачу. Численное интегрирование дифференциального уравнения осуществляется на периоде T, и полученное решение для t=T уточняется итерационной формулой Ньютона. Условием определения периодических решений является равенство нулю целевой функции.

Ключевые слова: экономический рост, математическая модель, производственная функция, модель чувствительности.

Bilyy L.A., Dutka G.Ya. The Analysis of Periodic Processes of Economic Growth on the Basis of Model of Sensitivity.

Publication is devoted to the analysis of nonlinear model of economic growth of Harrod-Domar based on the model of sensitivity to initial conditions. The model is based on assumptions on the nonlinearity of the production function and periodic character of the volume of consumption. Instead of the traditional solution of the Cauchy problem and the definition of economic growth as the end of the transition process is proposed to seek T-periodic solution. Equation of the model with initial conditions at the edges of the period is form two-point boundary value problem. Numerical integration of differential equation in the interval of time equal to the period T and the found solution for t=T is specified by the iterative formula of Newton. The condition for determining periodic solutions is equal to zero objective function.

Key words: economic growth, mathematical model, production function, the model of sensitivity.

Надійшло 13.01.2009 р.